E.N.S.I. TA 1979

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

On désigne par E l'espace vectoriel des applications f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, continues et vérifiant la propriété suivante :

(I) $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \ \exists M \in]0, +\infty[, \ \exists t_0 \in [0, +\infty[, \ \forall t \in \mathbb{R},$

$$(t \geqslant t_0) \Rightarrow (|f(t)| \leqslant M e^{\alpha t})$$

On désigne par F l'ensemble des applications définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

I

1° Montrer que les applications définies par les relations suivantes, pour t positif ou nul, sont des éléments de E :

$f_1 : t \longmapsto 1$

$f_2 : t \longmapsto t^n$ (pour $n \in \mathbb{N}$, n non nul)

$f_3 : t \longmapsto e^{Ct}$ (pour $C \in \mathbb{R}$)

$f_4 : t \longmapsto \operatorname{sh} Ct = \dfrac{e^{Ct} - e^{-Ct}}{2}$ (pour $C \in \mathbb{R}$)

$f_5 : t \longmapsto \sin Ct$ (pour $C \in \mathbb{R}$)

Les deux applications suivantes, définies pour t positif ou nul, par :

$f_6 : t \longmapsto e^{t^2}$

et

$f_7 : t \longmapsto e^{-t^2}$

sont-elles dans E?

2° Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ est convergente pour a strictement positif. Donner sa valeur.

Montrer avec les notations de (I) que pour toute application f de E, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,|f(t)|\,dt$ est convergente pour x strictement supérieur à α.

Soit D l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,|f(t)|\,dt$ est convergente.

Démontrer que :

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \ \forall x_2 \in \mathbb{R}, \quad (x_1 \in D \text{ et } x_2 \geqslant x_1) \Rightarrow (x_2 \in D)$$

En étudiant l'existence d'une borne inférieure de D dans $\mathbb{R}$, montrer que D est soit $\mathbb{R}$, soit un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ ou $[A, +\infty[$.

3° Soit L l'application de E dans F, qui à tout élément f de E, associe l'application $L[f]$ définie par :

$$L[f] : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt \quad \text{pour } x \in D$$

Démontrer que les applications $L[f_1]$, $L[f_2]$, $L[f_3]$, $L[f_4]$ et $L[f_5]$ sont définies par :

$L[f_1] : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$

$L[f_2] : x \longmapsto \dfrac{n!}{x^{n+1}}$ sur $]0, +\infty[$

$L[f_3] : x \longmapsto \dfrac{1}{x - C}$ sur $]C, +\infty[$

$L[f_4] : x \longmapsto \dfrac{C}{x^2 - C^2}$ sur $]|C|, +\infty[$ pour $C \neq 0$

$L[f_5] : x \longmapsto \dfrac{C}{x^2 + C^2}$ sur $]0, +\infty[$ pour $C \neq 0$

On prendra soin de vérifier que les intervalles de définition D_i des applications $L[f_i]$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont ceux indiqués.

II

1° Soit f_1 et f_2 deux applications quelconques de E.

Si $L[f_1]$ et $L[f_2]$ sont définies respectivement sur D_1 et D_2, démontrer que :

$\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}, \ \forall \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ \forall x \in D_1 \cap D_2,$

$$L[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2](x) = \lambda_1 L[f_1](x) + \lambda_2 L[f_2](x).$$

.../...

2° Soit f une application de E.

a. Supposons que f est dérivable et que f' appartient à E.

Notons D et D′ les intervalles de définition de $L[f]$ et $L[f']$.

Montrer que, si x_0 est un élément de $D \cap D'$, on a la relation :

$$\forall x > x_0, \; L[f'](x) = x\, L[f](x) - f(0)$$

(on pourra déduire ce résultat de la convergence des intégrales généralisées

$$\int_0^{+\infty} e^{-x_0 t} f(t)\, dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x_0 t} f'(t)\, dt,$$

et de l'hypothèse $x_0 < x$).

En déduire que cette relation est vraie pour tout réel x de $D \cap D'$, sauf peut-être pour la borne inférieure éventuelle de $D \cap D'$ dans $\mathbb{R}$.

b. Supposons que f est deux fois dérivable, et que f' et f'' appartiennent à E. Notons D, D′ et D″ les intervalles de définition respectifs de $L[f]$, $L[f']$ et $L[f'']$.

Montrer que si x_0 est un élément de $D \cap D' \cap D''$, on a la relation :

$$\forall x > x_0, \quad L[f''](x) = x^2 L[f](x) - x f(0) - f'(0)$$

En déduire que cette relation est vraie pour tout x de $D \cap D' \cap D''$, sauf peut-être pour la borne inférieure éventuelle de $D \cap D' \cap D''$ dans $\mathbb{R}$.

c. Généraliser les résultats obtenus aux 2° *a* et 2° *b* à une application f de E, n fois dérivable, et telle que ses n premières dérivées $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}, f^{(n)}$ appartiennent à E.

Que devient la relation liant $L[f^{(n)}]$ et $L[f]$ dans le cas où

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-2)}(0) = f^{(n-1)}(0) = 0\ ?$$

(n appartient à $\mathbb{N}$ et n non nul).

III

On désigne par L(E) l'image de l'application L.

On admettra que L définit une bijection de E sur L(E) et on notera L^{-1} la bijection réciproque.

1° Soit F_1 et F_2 deux applications quelconques de L(E), avec $F_1 = L[f_1]$ et $F_2 = L[f_2]$. Notons D_1 et D_2 les intervalles de définition de F_1 et F_2.

Définissons l'application $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ sur $D_1 \cap D_2$ pour deux réels quelconques λ_1 et λ_2, et supposons que $D_1 \cap D_2$ est aussi l'intervalle de définition de

$$L[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2].$$

Montrer, avec ces hypothèses, que $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ appartient à L(E), et que :

$$L^{-1}[\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2] = \lambda_1 L^{-1}[F_1] + \lambda_2 L^{-1}[F_2].$$

2° Soit $(\mathcal{E}_1)$ l'équation différentielle

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

a. On se propose de trouver, grâce à l'application L, une solution y de $(\mathcal{E}_1)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vérifiant les conditions initiales et telle que y, y' et y'' appartiennent à E.

Pour cela, on appliquera L aux deux membres de l'équation $(\mathcal{E}_1)$, et on en déduira $L[y]$, notée Y, puis y grâce aux relations de la question 3° de la première partie.

Déduire de cette solution y définie sur $[0, +\infty[$, la solution de $(\mathcal{E}_1)$ définie sur $\mathbb{R}$ entier, et vérifiant les mêmes conditions initiales.

b. Retrouver ce résultat en résolvant $(\mathcal{E}_1)$ par une méthode classique.

3° Soit $(\mathcal{E}_2)$ le système différentiel

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 3y_2 \\ y_2' = -2y_1 + y_2 \end{cases}$$

avec les conditions initiales $y_1(0) = 8$ et $y_2(0) = 3$.

a. On se propose de trouver, grâce à l'application L, un couple solution (y_1, y_2) de $(\mathcal{E}_2)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$, vérifiant les conditions initiales et tel que y_1, y_1', y_2 et y_2' appartiennent à E.

En appliquant L aux deux équations de $(\mathcal{E}_2)$, trouver deux relations liant

$$Y_1 = L[y_1] \quad \text{et} \quad Y_2 = L[y_2]$$

en déduire Y_1 et Y_2, puis y_1 et y_2, définies sur $[0, +\infty[$

en déduire enfin le couple solution de $(\mathcal{E}_2)$ défini sur $\mathbb{R}$ entier, et vérifiant les mêmes conditions initiales.

b. Retrouver ce résultat en résolvant $(\mathcal{E}_2)$ par une autre méthode.

FIN